La bataille, enfin analysée

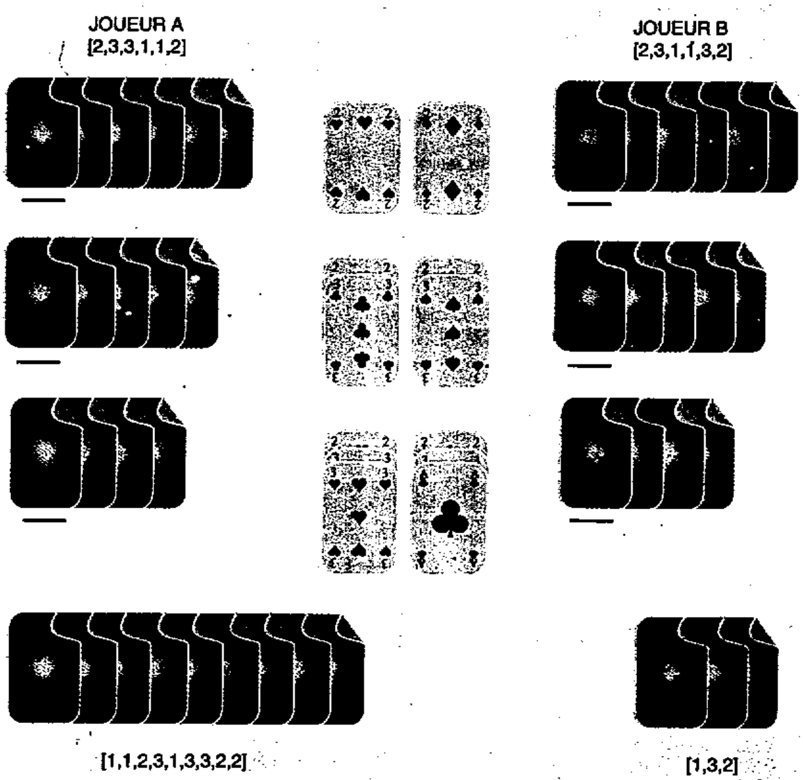
JEAN-PAUL DELAHAYE • PHILIPPE MATHIEU

Quelle est la probabilité de terminer avant le dîner cette partie de bataille commencée avec votre petit neveu?

1. LES RÈGLES DE LA BATAILLE

Le jeu comporte quatre fois la carte '1', quatre fois la carte '2', ..., quatre fois la carte '*N*'.
Les cartes sont distribuées en deux paquets égaux de 2 *N* cartes.
Pour jouer un pli, chaque joueur prend la carte au-dessus de son paquet et la pose sur la table, face visible.
Si les deux cartes posées sont de forces différentes, le joueur qui a mis la carte la plus forte gagne le pli.
Si les deux cartes sont de même force, les joueurs prennent une nouvelle carte au-dessus de leur paquet et la posent sur la table, face visible.
Si les nouvelles cartes sont de forces différentes, celui qui a mis la plus forte gagne le pli, sinon chaque joueur remet une nouvelle carte, etc.
Le joueur qui a gagné le pli remet les deux cartes sous son paquet en commençant par la plus forte.
Puis, s'il y avait eu une bataille, il place sous son paquet les deux cartes de la bataille ; puis, si cette bataille était précédée d'une autre bataille, celles de cette autre bataille etc.

DÉROULEMENT D'UN PLI AVEC BATAILLES



On pourrait penser que les spécialistes de la théorie des jeux s'intéresseraient aux jeux les plus courants : il n'en est rien! Si tout le monde a joué une fois dans sa vie à la bataille, très peu d'études lui sont consacrées.

Même si le roi Charles VI y jouait, assure-t-on, des journées entières avec sa favorite Odette de Champdivers, le jeu de la bataille est en général considéré comme de peu d'intérêt. Les joueurs sont dans les mains du hasard et ne décident de rien. En revanche, les problèmes combinatoires posés par la bataille sont si difficiles que l'aide d'ordinateurs est nécessaire pour les traiter ; et encore, l'informatique est impuissante à les traiter tous. Ni les mathématiciens ni les informaticiens – à ma connaissance – ne disposent de techniques générales pour répondre avec certitude aux trois questions suivantes :

– Se peut-il qu'une partie de bataille soit infinie?

– Si oui, quelle est la proportion de parties infinies?

– Quelle est (exception faite des parties infinies, s'il y en a) la durée moyenne d'une partie?

LE RANGEMENT DES CARTES GAGNÉES

Les règles adoptées pour le jeu de la bataille sont souvent imprécises, en particulier celles concernant le rangement des cartes gagnées. Nous avons retenu les règles les plus simples et les plus naturelles.

On prend un jeu de 4*N* cartes, comportant quatre fois la carte '1', quatre fois la carte '2', ..., quatre fois la carte '*N*'. La force d'une carte est déterminée par son numéro. Dans les variantes les plus classiques, *N* est égal à 8 (jeu de 32 cartes) ou *N* est égal à 13 (jeu de 52 cartes). Les cartes de numéros supérieurs à 10 portent d'autres noms, valet, dame, roi, mais il est équivalent de numéroter les cartes de 1 à *N*.

Les cartes sont distribuées en deux paquets égaux de 2*N* cartes. Chaque joueur tient son paquet dans une main, toutes les cartes rangées les unes sous les autres, les faces visibles vers le bas. Les joueurs n'ont jamais le droit de modifier l'ordre des cartes de leur paquet.

Pour jouer un pli, chaque joueur prend la carte au-dessus de son paquet et la pose sur la table face visible. Si les deux cartes posées sont de forces différentes, le joueur qui a mis la carte la plus forte gagne le pli. Si les deux cartes sont de même force, les joueurs s'écrient «bataille!», prennent une nouvelle carte au-dessus de leur paquet et la posent sur la table, face visible. Il existe une variante dite «bataille payante», où en cas de bataille chaque joueur ajoute une carte face cachée et une carte face visible, mais nous ne l'étudierons pas, car nous avons choisi de nous préoccuper que de la règle la plus simple. Quand les nouvelles cartes face visible sont de forces différentes, celui qui a mis la plus forte gagne le pli, sinon chaque joueur remet une nouvelle carte, etc.

Le joueur qui a gagné le pli remet les deux cartes qui viennent de s'affronter sous son paquet en commençant par la plus forte (la sienne, qui vient de gagner). Cette règle de rangement est naturelle, car le gagnant souhaite pouvoir réutiliser la meilleure carte le plus rapidement possible. Puis, s'il y a eu bataille, il place sous son paquet les deux cartes de la bataille ; si cette bataille était précédée d'une autre bataille, il place ensuite celles de cette autre bataille, etc. Ce classement facilite la manipulation des cartes.

Si, par exemple, les paquets sont [2, 3, 3, 1, 1, 2] pour le joueur *A* et [2, 3, 1, 1, 3, 2] pour le joueur *B* (les cartes d'un paquet sont notées en plaçant celle du dessus à gauche), les joueurs mettent chacun un '2' sur la table, puis chacun un '3', puis un '3' et un '1'. Le joueur *A* gagne. Il range dans l'ordre suivant les cartes sous son paquet : le '3' (qui l'a fait gagner), le '1' (qu'il prend à son adversaire), puis les deux '3' de la deuxième bataille, puis les deux '2' de la première bataille. Les jeux sont donc devenus [1, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 2, 2] pour le joueur *A* et [1, 3, 2] pour le joueur *B*.

Une partie est terminée lorsqu'un joueur n'a plus de carte ; ce joueur a perdu. Cela peut se produire pendant une bataille avant qu'elle ne se soit réglée, par exemple si les jeux sont : [2,1,3,2,1,3,3,2,1] et [2,1,3].

Certaines parties peuvent être nulles. Cela se produit si aucun des deux joueurs ne peut plus fournir de cartes au même moment, car ils possèdent chacun les mêmes cartes dans le même ordre, par exemple : [2,3,1,1,3,2] [2,3,1,1,3,2]. Les règles étant fixées, une partie est déterminée (et donc le gagnant) dès que les cartes sont distribuées.

COMBIEN Y A-T-IL DE PARTIES POSSIBLES?

La première question que suggère le jeu est : combien de parties différentes possibles peut-on jouer? La réponse est donnée par les mathématiques.

Pour un jeu de $4N$ cartes, il y a $(4N)!/(4!)^N$ distributions différentes possibles. Le nombre de parties différentes lui est $((4N)!/(4!)^N + (2N)!/(2!)^N)/2$ *(voir les explications du tableau 2 ci-dessous).* Pour le jeu de 32 cartes, il y a 1 195 230 914 866 984 819 824 000 parties différentes, et vous avez donc peu de chances de faire deux fois la même partie avec votre petit neveu. En jouant mille parties par jour depuis la création de l'Univers (15 milliards d'années), on n'aurait pas épuisé toutes les parties possibles.

Aujourd'hui avec de bons ordinateurs, avec de bons programmes, on joue environ mille parties par seconde, alors qu'il aurait fallu en jouer plus de trois millions par seconde depuis le Big-Bang pour avoir essayé toutes les parties possibles de bataille à 32 cartes. Quant au nombre de parties avec un jeu de 52 cartes, il est encore de beaucoup supérieur.

LA BATAILLE À 4, 8 ET 12 CARTES

Lorsque *N* est égal à 1 (jeu de 4 cartes), la seule distribution possible est [1,1] [1,1], qui conduit immédiatement à une partie nulle. Pour *N* égal à 2 (jeu de 8 cartes), il y a 38 parties différentes, dont 11 nulles. La durée d'une partie est au plus de 5 plis. Il y a 6 parties à 1 pli, 6 parties à 2 plis, 16 parties à 3 plis, 3 parties à 4 plis, 7 parties à 5 plis. Aucune partie n'est infinie *(voir la figure 3).*

Pour *N* égal à 3 (jeu de 12 cartes), il existe des parties infinies, mais, chose étonnante, elles sont toutes du même type : le jeu tombe dans le cycle de période 19 représenté sur le tableau 4. Qui saura trouver une démonstration mathématique de ce fait (différente de celle consistant à énumérer, comme nous l'avons fait, les 17 370 parties différentes pour constater qu'il n'y a qu'un seul type de partie infinie)?

Le nombre de parties infinies est 360. Le nombre de parties nulles est 431. La partie la plus longue parmi celles qui s'arrêtent est de 37 plis, ce qui correspond à 54 cartes jouées par chaque joueur (il y a moins de plis que de cartes jouées, à cause des batailles). On l'obtient avec la distribution [3,1,1,2,3,2] [3,1,3,2,1,2].

La probabilité de tomber sur une partie infinie est environ 2 pour cent, et la probabilité de tomber sur une partie nulle est aussi 2 pour cent. La durée moyenne d'une partie qui se termine est de 8,93 plis. Le nombre moyen de cartes jouées par chaque joueur lors d'une partie qui se termine est 13,15.

Autrement dit, avec 12 cartes, dans un cas sur 50 à peu près, vous jouerez indéfiniment avec votre petit neveu ; dans les autres cas, la partie ne durera que peu de coups et sera nulle dans un cas sur 50 à peu près.

Pour *N* supérieur à 4 (16 cartes, 20 cartes, etc.), il est difficile de mener des

2. NOMBRES DE DISTRIBUTIONS DIFFÉRENTES

Pour déterminer une distribution possible, commençons par calculer le nombre de façons qu'il y a de classer les $4N$ cartes. Il y en aurait $(4N)!$ si les cartes étaient toutes de forces différentes, mais, comme les 4 '1' sont équivalents, de même que les 4 '2', etc. il faut diviser ce nombre par $(4!)^N$.
En coupant un paquet en deux au milieu, on obtient une distribution. Il semble donc qu'il y ait $(4N)!/(4)!^N$ distributions possibles ; toutefois certaines parties sont obtenues deux fois (une fois le joueur 1 a le jeu A et le joueur 2 le jeu B, et une autre fois le joueur 1 le jeu B et le joueur 2 le jeu A). Ces distributions comptées deux fois sont toutes celles où les jeux du joueur 1 et du joueur 2 sont différents. Il faut donc dénombrer les cas où les jeux A et B sont les mêmes.
Si les deux joueurs ont le même jeu, alors celui-ci comporte 2 '1' et 2 '2', etc., dans un ordre quelconque. Il y a $(2N)!/2^N$ tels jeux.
Donc, au total, le nombre de parties différentes est :
$(2N)!/2^N + [(4N)!/(4!)^N - (2N)!/2^N]/2 = [(4N)!/(4!)^N + (2N)!/2^N]/2$
Ce qui donne :

N=1 (4 cartes)	1
N=2 (8 cartes)	38
N=3 (12 cartes)	17 370 = 1,7 10^4
N=4 (16 cartes)	31 532 760 = 3,1 10^7
N=5 (20 cartes)	152 770 174 200 = 1,5 10^{11}
N=6 (24 cartes)	1 623 335 272 297 200 = 1,6 10^{15}
N=7 (28 cartes)	33 237 789 624 004 165 200 = 3,3 10^{19}
N=8 (32 cartes)	1 195 230 914 866 984 819 824 000 = 1,2 10^{24}
N=9 (36 cartes)	70 405 077 040 237 339 921 593 072 000 = 7,0 10^{28}
N=10(40 cartes)	6 434 319 990 707 289 925 222 982 683 680 000 = 6,4 10^{33}
N=11(44 cartes)	873 465 373 058 505 314 477 955 434 719 930 080 000 = 8,7 10^{38}
N=12(48 cartes)	169 958 892 289 723 964 091 067 248 703 280 044 702 080 000 = 1,6 10^{44}
N=13(52 cartes)	46 012 121 115 135 520 178 554 160 425 550 979 766 528 176 000 000= 4,6 10^{49}

études exhaustives, même avec l'ordinateur (4 est la dernière valeur où cela est possible). Pour *N* égal à 4, on constate qu'on tombe sur une partie nulle deux fois sur 1 000 à peu près (0,18 pour cent), et qu'on trouve une partie infinie trois fois sur 10 000 (0,027 pour cent). Une partie infinie est indiquée sur la figure 5. La durée moyenne d'une partie finie est de 21,6 plis, chaque joueur utilisant en moyenne 28,6 cartes. Le plus grand nombre de plis pour une partie finie est 145, et le plus grand nombre de cartes jouées par un joueur lors d'une partie finie est 192.

La décroissance de la proportion de parties infinies et des parties nulles est confirmée pour *N* supérieur à 5 (20 cartes ou plus). L'exploration aléatoire a permis de trouver quelques parties infinies pour *N* égal à 6 (jeu de 24 cartes) et *N* égal à 7 (jeu de 28 cartes), mais aucune pour *N* égal à 5 (jeu de 20 cartes) et aucune pour *N* supérieur ou égal à 8 (jeux de 32 cartes ou plus).

Le cas *N* égal à 5 est-il particulier? L'une des parties infinies trouvées pour *N* égal à 7 possède la propriété amusante suivante : l'un des joueurs a toujours moins de cartes que l'autre (environ trois fois moins), mais, ses bonnes cartes revenant rapidement, il se maintient indéfiniment face à l'autre.

La conclusion des études statistiques est résumée sur la figure 6 : au-delà de *N* égal à 4 (16 cartes), en jouant à la bataille vous ne tomberez pratiquement jamais sur une partie infinie ou nulle, et la durée moyenne des parties sera raisonnable : 104 plis pour un jeu de 32 cartes, et 287 plis pour un jeu de 52 cartes.

UNE PARTIE INFINIE POUR LE JEU DE 32 CARTES

Pourtant le théoricien qui sommeille en chacun de nous est peu satisfait de ces résultats statistiques : il aimerait bien savoir s'il existe des parties infinies au moins dans les cas du jeu de 32 cartes et du jeu de 52 cartes.

Nous donnons la réponse pour le jeu de 32 cartes et expliquons comment on l'obtient par le raisonnement. Pour le jeu de 52 cartes, nous n'avons pas trouvé la réponse, mais nous indiquons une voie qui permettra peut-être de l'obtenir. La partie infinie pour 16 cartes, indiquée sur la figure 5, possède une propriété particulière de bon alignement. Lorsque les paquets initiaux de chaque joueur [2,1,4,4,2,1,3,3] [4,2,4,1,3,2,3,1] se sont affrontés, les paquets reconstitués par chacun d'eux ont le même nombre de cartes (remarquez que cela ne se produit pas pour la partie infinie de 12 cartes donnée sur la figure 4), et lorsque de nouveau ces paquets reconstitués se sont affrontés, les joueurs ont encore le même nombre de cartes. On est alors revenu au point de départ (à l'interversion près des deux jeux), et donc la partie se poursuit indéfiniment.

Il est clair par ailleurs que, si on prend la même distribution en augmentant la valeur de chaque carte de 4, ce qui donne [6,5,8,8,6,5,7,7] [8,6,8,5,7,6,7,5], la partie jouée aura la même propriété de bon alignement. Ce bon alignement des parties permet de mettre l'une derrière l'autre les deux distributions, ce qui correspond alors à une distribution de 32 cartes: [2,1,4,4,2,1,3,3,6,5,8,8,6,5,7,7] et [4,2,4,1,3,2,3,1,8,6,8,5,7,6,7,5].

Par construction, cette distribution de 32 cartes garde la propriété de bon alignement et engendre une partie infinie, ce qu'on peut vérifier à la main. Il y a donc des parties infinies de bataille avec un jeu de 32 cartes. La même construction donne des parties infinies pour toutes les valeurs de *N* multiples de 4 (donc pour les jeux de 48 cartes, 64 cartes, 80 cartes, etc.).

3. TOUTES LES PARTIES POSSIBLES DE LA BATAILLE AVEC 8 CARTES

Les 6 parties à 1 pli
[1, 1, 2, 2][1, 1, 2, 2] Nulle
[1, 2, 1, 2][1, 2, 1, 2] Nulle
[1, 2, 2, 1][1, 2, 2, 1] Nulle
[2, 1, 1, 2][2, 1, 1, 2] Nulle
[2, 1, 2, 1][2, 1, 2, 1] Nulle
[2, 2, 1, 1][2, 2, 1, 1] Nulle

Les 6 parties à 2 plis
[1, 1, 2, 1][1, 2, 2, 2]
[1, 1, 2, 1][2, 1, 2, 2]
[1, 2, 1, 1][1, 2, 2, 2]
[1, 2, 1, 1][2, 2, 1, 2]
[2, 1, 1, 1][2, 1, 2, 2]
[2, 1, 1, 1][2, 2, 1, 2]

Le 16 parties à 3 plis
[1, 2, 1, 2][2, 1, 1, 2] Nulle
[1, 2, 2, 1][2, 1, 2, 1] Nulle
[1, 1, 1, 2][2, 2, 1, 2]
[1, 1, 1, 2][1, 2, 2, 2]
[1, 1, 1, 2][2, 1, 2, 2]
[1, 1, 2, 1][2, 2, 2, 1]
[1, 1, 2, 2][1, 2, 1, 2]
[1, 1, 2, 2][2, 1, 1, 2]
[1, 1, 2, 2][2, 1, 2, 1]
[1, 2, 1, 1][2, 2, 2, 1]
[1, 2, 1, 2][1, 2, 2, 1]
[1, 2, 1, 2][2, 2, 1, 1]
[1, 2, 2, 1][2, 2, 1, 1]
[2, 1, 1, 1][2, 2, 2, 1]
[2, 1, 1, 2][2, 1, 2, 1]
[2, 1, 2, 1][2, 2, 1, 1]

Les 3 parties à 4 plis
[1, 1, 1, 1][2, 2, 2, 2]
[1, 1, 2, 2][1, 2, 2, 1]
[2, 1, 1, 2][2, 2, 1, 1]

Les 7 parties à 5 plis
[1, 1, 2, 2][2, 2, 1, 1] Nulle
[1, 2, 1, 2][2, 1, 2, 1] Nulle
[1, 2, 2, 1][2, 1, 1, 2] Nulle
[1, 1, 1, 2][2, 2, 2, 1]
[1, 1, 2, 1][2, 2, 1, 2]
[1, 2, 1, 1][2, 1, 2, 2]
[2, 1, 1, 1][1, 2, 2, 2]

Il y a 11 parties nulles, mais il n'y a jamais de partie infinie.

4. UNE PARTIE INFINIE AVEC 12 CARTES

1 [3,2,1,1,2,1] JOUEUR A
[2,1,3,2,3,3] JOUEUR B
2 [2,1,1,2,1,3,2]
[1,3,2,3,3]
3 [1,1,2,1,3,2,2,1]
[3,2,3,3]
4 [1,2,1,3,2,2,1]
[2,3,3,3,1]
5 [2,1,3,2,2,1]
[3,3,3,1,2,1]
6 [1,3,2,2,1]
[3,3,1,2,1,3,2]
7 [3,2,2,1]
[3,1,2,1,3,2,3,1]
8 [2,1,2,1,3,3]
[2,1,3,2,3,1]
9 [1,3,3]
[2,3,1,3,2,1,1,2,2]
10 [3,3]
[3,1,3,2,1,1,2,2,2,1]
11 [3,1,3,3]
[3,2,1,1,2,2,2,1]
12 [3,3]
[1,1,2,2,2,1,2,1,3,3]
13 [3,3,1]
[1,2,2,2,1,2,1,3,3]
14 [3,1,3,1]
[2,2,2,1,2,1,3,3]
15 [1,3,1,3,2]
[2,2,1,2,1,3,3]
16 [3,1,3,2]
[2,1,2,1,3,3,2,1]
17 [1,3,2,3,2]
[1,2,1,3,3,2,1]
18 [2,3,2,3,2,1,1]
[1,3,3,2,1]
19 [3,2,3,2,1,1,2,1]
[3,3,2,1]
20 = 1
[3,2,1,1,2,1]
[2,1,3,2,3,3]

Cette partie est la seule partie infinie avec un jeu de 12 cartes, car, même si elles ont un début différent, toutes les parties infinies aboutissent sur celle-ci.

5. UNE PARTIE INFINIE AVEC 16 CARTES DONT ON TIRE UNE PARTIE INFINIE AVEC 32 CARTES

1 [2,1,4,4,2,1,3,3]
[4,2,4,1,3,2,3,1]
2 [1,4,4,2,1,3,3]
[2,4,1,3,2,3,1,4,2]
3 [4,4,2,1,3,3]
[4,1,3,2,3,1,4,2,2,1]
4 [2,1,3,3,4,1,4,4]
[3,2,3,1,4,2,2,1]
5 [1,3,3,4,1,4,4]
[2,3,1,4,2,2,1,3,2]
6 [3,3,4,1,4,4]
[3,1,4,2,2,1,3,2,2,1]
7 [4,1,4,4,3,1,3,3]
[4,2,2,1,3,2,2,1]
8 [4,4,3,1,3,3]
[2,1,3,2,2,1,2,1,4,4]
9 [4,3,1,3,3,4,2]
[1,3,2,2,1,2,1,4,4]
10 [3,1,3,3,4,2,4,1]
[3,2,2,1,2,1,4,4]
11 [3,3,4,2,4,1]
[2,1,2,1,4,4,2,1,3,3]
12 [3,4,2,4,1,3,2]
[1,2,1,4,4,2,1,3,3]
13='1 inversé'
[4,2,4,1,3,2,3,1]
[2,1,4,4,2,1,3,3]

5. Cette partie infinie à 16 cartes possède la propriété de bon alignement : lorsque les paquets initiaux sont épuisés, les paquets reconstitués par les joueurs ont la même longueur ; de même quand les paquets reconstitués sont épuisés, etc. Elle permet de construire une partie infinie de bataille pour le jeu de 32 cartes. En revanche, aucune partie infinie pour le jeu de 52 cartes n'est connue, et, ces parties étant extrêmement rares (s'il en existe), les méthodes d'essais au hasard, même avec des ordinateurs puissants, ne donnent aucun résultat.

	NOMBRES DE CARTES	DURÉE MOYENNE D'UNE PARTIE FINIE: EN PLIS	DURÉE MOYENNE D'UNE PARTIE FINIE: EN CARTES	DURÉE DE LA PLUS GRANDE PARTIE TROUVÉE: EN PLIS	DURÉE DE LA PLUS GRANDE PARTIE TROUVÉE: EN CARTES
N = 1	4	1	2	1	2
N = 2	8	2,97	5,26	5	8
N = 3	12	8,93	13,15	37	54
N = 4	16	21,62	28,60	145	192
N = 5	20	36,10	44,10	453	562
N = 6	24	55,25	65,08	856	1029
N = 7	28	78,28	89,91	1428	1670
N = 8	32	104,14	117,42	1727	1948
N = 9	36	133,97	148,94	2237	2488
N = 10	40	167,12	183,94	2912	3214
N = 11	44	203,83	222,10	3067	3376
N = 12	48	243,74	263,64	3956	4284
N = 13	52	287,03	308,54	4571	4912

6. La durée moyenne des parties de bataille augmente raisonnablement vite et régulièrement avec le nombre de cartes, et c'est le cas aussi de la durée des parties les plus longues que nous avons trouvées. La fréquence des parties infinies décroît si vite qu'il devient impossible d'en trouver par sondage aléatoire pour *N* supérieur à 7. Les moyennes ont été calculées exactement jusqu'à N égal à 4 et évaluées à partir d'un tirage aléatoire de un million de parties de chaque type pour *N* supérieur à 4.

Des parties infinies bien alignées trouvées pour N égal à 6 permettent de traiter tous les cas où N est de la forme $4K+6M$, et donc toutes les valeurs paires de N.

Cette méthode ne résout malheureusement pas le cas du paquet de 52 cartes, mais suggère de rechercher (avec encore plus d'insistance que nous ne l'avons fait) des distributions de 20 cartes donnant des parties infinies. Si on trouve une telle partie infinie de 20 cartes et si elle est bien alignée, alors, en la composant comme précédemment, on obtiendra des parties infinies pour toutes les valeurs de N de la forme $4K+5M$, et donc le cas N égal à 13 sera résolu. Si cette méthode fonctionne, seul restera non traité le cas N égal à 11. Indiquons que nos essais ne nous ont pas donné de partie infinie pour N égal à 5 (20 cartes). Les quelques milliards de parties essayées nous font soupçonner qu'il pourrait ne pas y en avoir. Les lecteurs pourront-ils faire mieux par le calcul ou par le raisonnement?

Jean-Paul DELAHAYE et Philippe MATHIEU sont chercheurs au Laboratoire d'Informatique fondamentale de Lille du CNRS.